217. 或ル種ノ線狀移動可能函數方程式ニ就イテ(II)

北川　敏　男　(阪大)

4. 定理1ハ，實ハ次ノ如ク精密ニ出來ル，即チ

定理2. 定理1ト同ジ假定ノモトニ於イテ

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_r}\frac{e^{\lambda x}\{\mathbb{L}(x_0,x,\lambda:f)+\mathbb{K}(x_0,x,\lambda:f)\}}{G(\lambda)}\,d\lambda$$

$$\longrightarrow f(x) \qquad (r\to\infty\ ノトキ)$$

ナルヤウニ，$\{\mathfrak{C}_r\}$ ヲエラベル。但シ，$x_0+h_s<x<x_0+h_{s+1}$ $(s=0,1,2,\cdots\cdots,n-1)$ デアル。

然モ各區間 $x_0+h_s+\varepsilon\leqq x\leqq x_0+h_{s+1}-\varepsilon$ ニ於テ收斂ハ一樣デアル。(但シ ε ハ任意ノ正數)

證明ニハ，豫備定理 1, 2, 3 ニ於イテ、各々ノ Limit ガ夫々，$0<\varepsilon\leqq q\leqq b-\varepsilon$，$0<\varepsilon\leqq\delta\leqq h_s-\varepsilon$，$0<\varepsilon\leqq\delta\leqq h_s-\varepsilon$ デ一樣ニ存在スルコトヲ云ッテオケバヨイノデアル。

茲デ始メテ $f(x)$ ガ

$$\sum_{k=0}^{n}\int_a^b f^{(k)}(x+t)\,d\varphi_k(t)=0 \quad (-\infty<x<+\infty) \qquad \text{(iv)}$$

トイフ條件ヲ入レルナラバ，

定理3. 定理1ノ假定ニ更ニ條件(iv)ヲ加ヘルナラバ，

$S_r(x_0,x;f)$ ハ任意ノ有限區間デ一樣ニ，$f(x)$

ニ収斂スル。

証明：　コレニハ，

$$L(x_0, x, \lambda : f) + \mathrm{K}(x_0, x, \lambda : f)$$

ガ x_0 ノ函数トシテハ実ハ常数ナルコトヲ示セバヨイ.

ソノタメニハ

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left\{L(x_0, x, \lambda : f) + \mathrm{K}(x_0, x, \lambda : f)\right\} = 0$$

ナルコトヲ、(iv)ヲ用ヰテ証明スレバヨイ。計算ハ略ス。

5. 今マデノ問題ヲ離レ、一般ノ定差法ノ所論ニ平行シテ *homogeneous* デナイ函数方程式

$$\sum_{k=0}^{n} \int_a^b f^{(k)}(x+\xi)\, d\varphi_k(\xi) = g(x)$$

ノ解ノ研究ニ移ラウ。

先ヅ拡張サレタ *Bernoulli's polynomials* トモイフベキモノヲ次ノ如ク導入スル：

(0°)　先ヅ $B_0 \int_a^b d\varphi_0(\xi) = 1$ トナルヤウニ B_0 ヲ決定スル、コレニハ $\int_a^b d\varphi_0(\xi) \neq 0$ ヲ假定シテオク。

(1°)　次ニ，$B_1(\xi) = B_0 \xi + B_1$ トオイテ

$$\Gamma B_1(0) = B_1 \int_a^b d\varphi_0(\xi) + B_0 \left\{ \int_a^b \xi\, d\varphi_0(\xi) + \int_a^b d\varphi_1(\xi) \right\} = 0$$

ニ依リ B_1 ガ一意ニ決定スル。

(2°)　又，$B_2(\xi)=\dfrac{B_0}{2!}\xi^2+\dfrac{B_1}{1!}\xi+B_2$ トオイテ

「$B_2(0)=0$」ガ B_2 ガ一定ニキマル。

一般ニ

$$(n°)\quad B_n(\xi)=\frac{B_0\xi^n}{n!}+\frac{B_1\xi^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{B_2\xi^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots\cdots+B_{n-1}\xi+B_n$$

トシテ

$$\sum_{k=0}^{n}\int_a^b B_n^{(k)}(\xi)\,d\varphi_k(\xi)=0 \tag{A}$$

ニヨリ、B_n ガ決定サレル。

又以上ノツクリ方カラ明カニ

$$\frac{dB_r(\xi)}{d(\xi)}=B_{r-1}(\xi) \tag{B}$$

6. 以上ノ如ク $\{B_r(\xi)\}$ ヲ定義スルトキ、次ノ結果ヲ得ル.

定理4. $G(\lambda)$ ノ零点以外デハ

$$\frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)}=\sum_{s=0}^{\infty}B_s(x)\lambda^s$$

証明：

$$G(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\lambda^k\int_a^b e^{\lambda t}d\varphi_k(t)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+m}\int_a^b t^m d\varphi_k(t)}{m!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+m}\alpha_{m,k}}{m!}$$

但シ

$$\alpha_{m,k}=\int_a^b t^m d\varphi_k(t) \quad (m\geqq 0,\ k\geqq 0\ ノトキ)$$

$$\alpha_{m,k}=0 \quad (m<0\ ノトキ)$$

トシテオク。

ソコデ更ニ

$$\beta_s=\frac{\alpha_{s,0}}{s!}+\frac{\alpha_{s-1,1}}{(s-1)!}+\cdots\cdots+\frac{\alpha_{s-n,n}}{(s-n)!}$$

トオケバ

$$G(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^{k+m}\alpha_{m,k}}{m!}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^s\beta_s$$

トナル、ソコデ

$$\frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)}=\sum_{s=0}^{\infty}q_s(x)\lambda^s$$

トオイテ $q_s(x)\equiv B_s(x)$ トナルコトヲ示サウ。

コレニハ，

$$e^{\lambda x}=\sum_{s=0}^{\infty}q_s(x)\lambda^s\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^s\beta_s$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\beta_m q_0(x)+\beta_{m-1}q_1(x)+\cdots\cdots+\beta_0 q_m(x)\right\}\lambda^m$$

即チ

$$\beta_m g_0(x)+\beta_{m-1} g_1(x)+\cdots\cdots+\beta_0 g_m(x)=\frac{x^m}{m!}$$

ニヨツテ $\{g_n(x)\}$ ノ定マルコトガワカル，コレ $\{B_n(x)\}$ ヲ決定スル式ニ外ナラヌコトガ分ル。

定理5.

$$\Gamma B_m(x)=\sum_{k=0}^{n}\int_a^b B_m^{(k)}(x+\xi)\,d\varphi_k(\xi)=\frac{x^m}{m!}\quad(m=0,1,2,\cdots\cdots)$$

証明：

$$B_m(x+\xi)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{B_m^{(s)}(\xi)}{s!}x^s=\sum_{s=0}^{m}\frac{B_m^{(s)}(\xi)}{s!}x^s$$

$$=\sum_{s=0}^{m}\frac{B_{(m-s)}(\xi)}{s!}x^s$$

依ッテ

$$\Gamma B_m(x)=\sum_{k=0}^{n}\int_a^b\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}\left\{B_m(x+\xi)\right\}d\varphi_k(\xi)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\int_a^b\left\{\sum_{s=0}^{m}\frac{B_{m-s-k}(\xi)}{s!}x^s\right\}d\varphi_k(\xi)$$

$$=\sum_{s=0}^{m}\frac{x^s}{s!}\sum_{k=0}^{n}\int_a^b B_{m-s-k}(\xi)\,d\varphi_k(\xi)$$

$$=\sum_{s=0}^{m}\frac{x^s}{s!}\Gamma B_{m-s}(0)\qquad(m-s\geqq 0)$$

$$=\frac{x^m}{m!}$$

（証明了）

次ニ，コレヲ土台ニシテ Euler-Maclaurin ノ定理ノ擴張ニ移ラウ。

——(續ク)——